Formes bilin. sym et f. quad (p.293)

Comme E est de dim. finie, une f.bilin. s est symétrique ssi sa matrice (ds une base qcq) est symétrique. L'introduction des f.quad facilite l'étude des f.b.s.

Def *: $q : E \to \mathbb{R}$ est dite **forme quadratique** sur E si, étant donnée une base $\{e_i\}$, $q(x)$ est un polynôme homogène de degré 2(1) en les composantes x_i de x dans la base (e_i).*

On vérifie que la def° de la f.quad est indep de la base.

Prop : correspondance bij entre f.b.s et formes quad.
1) *Soit $s : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilin. symétrique.*
Alors $q : E \to \mathbb{R}$ déf. par $q(x) = s(x,x)$ est une forme quadratique sur E
2) *Récipq^t, soit $q : E \to \mathbb{R}$ une f. quad sur E, alors $\exists!$ forme bilin. sym. $s : E \times E \to \mathbb{R}$ tq $q(x) = s(x,x)$.*

s est donnée par: $s(x,y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$.

*s est dite **forme polaire** de q.*

Remarque: Si s est un produit scalaire, $q(x) = \|x\|^2$.

Def *: Soit $q : E \to \mathbb{R}$ forme quad., le **noyau de q** est: $N(q) = \{y \in E \,/\, \forall x \in E, s(x,y) = 0\}$.*

*Le **cône isotrope** de q est: $I(q) = \{x \in E \,/\, q(x) = 0\}$.*

On a $N(q) \subset I(q)$.

Def *: q est dite **non dégénérée** ssi $N(q) = \{0\}$.*

*q est dite **définie** ssi $I(q) = \{0\}$. ($q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ suffit). – Le seul vect. isotrope est 0.-*

*q est dite **déf. pos.** ssi : $q(x) \geq 0$ et $(q(x) = 0 \Rightarrow x = 0)$*

Prop *(en dim. finie seul^t): $\dim E = \dim N(q) + rg(q)$*

<u>Cas euclidien:</u>
Définie positive ⇒ non dégénérée.
Le produit scalaire est non dégénéré.
Un produit scalaire est anisotrope (pas de vect.isot).

Orthogonalité (p.298-305)

Bases orthogonales, orthonormées.

Def *: Une base $\{e_i\}$ de E est dite **orthogonale pour** la f.bil.sym. **s** ssi $\forall i \neq j, s(e_i, e_j) = 0$,*

***orthonormée pour s** ssi $\forall i, j, s(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.*

Remarque: en dim. finie, caractérisations de $\{e_i\}$ orthog

$$\text{-->ssi } M(q)_{e_i} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}, \text{où } a_i = s(e_i, e_i) = q(e_i)$$

$$\text{-->ssi } q(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2, \text{ où } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Th *: Si $E \neq \{0\}$ est de dim. finie, **il existe des bases de E orthogonales pour q**, (mais pas nécessairement des bases orthonormées).*

Sous-espaces orthogonaux.

Def *: Soit A⊂E (pas nécess^t sev). On appelle **orthogonal de A pour s** l'ensemble:*
$A^\perp = \{x \in E \,/\, \forall a \in A,\ s(x,a) = 0\}$.

Prop *:*
$A^\perp$ est un sev de E (mm si A ne l'est pas)

$\{0\}^\perp = E$

$E^\perp = N(q)$

$\forall A \subset E,\ N(q) \subset A^\perp$

Prop *: Soient E de dim. finie et F sev de E. (où N=N(q)).*
$\dim E = \dim F + \dim F^\perp - \dim(F \cap N)$

$F^{\perp\perp} = F + N$

en particulier, <u>si q est non dégénérée</u>,
$\dim E = \dim F + \dim F^\perp$

$F^{\perp\perp} = F$

Sous-espaces isotropes.

Def *: Un sev F de E est dit **isotrope** ssi: $F \cap F^\perp \neq \{0\}$*

Prop *: Soient E de dim. finie et F sev de E.*
$E = F \oplus F^\perp \iff$ F est non isotrope, ie $F \cap F^\perp = \{0\}$

BON par le procédé de Schmidt (p.298-305)

***Le procédé d'orthonormalisation de Schmidt** permet d'obtenir, à partir d'une base qcq, une BON (pour le pdt scalaire) dans un espace euclidien. On construit cette base par récurrence. On construit d'abord une base orthogonale en posant $\varepsilon_1 = v_1$, puis $\varepsilon_2 = v_2 \underbrace{-\lambda \varepsilon_1}_{\text{partie à enlever pour avoir } \langle \varepsilon_2, \varepsilon_1 \rangle = 0}$, etc par récurrence.*

Ensuite on normalise en posant $e_i = \frac{\varepsilon_i}{\|\varepsilon_i\|}$.

<u>Mais</u> cette méthode, si on l'applique en prenant s comme pdt scalaire, oblige à diviser par $\|\varepsilon_i\| = q(\varepsilon_i)$, qui pourrait être nul (si ε_i est isotrope).

Le procédé d'orthonormalisation de Schmidt est cependant <u>valable dans un espace euclidien</u>, car le produit scalaire est anisotrope.

BON par la méthode de Gauss (p.300).

Cas général Grifone p.300

Début de la leçon 121↴

Soit $(E,\langle .,.\rangle)$ un ev eucl. de dim. finie n.

Il s'agit de rechercher des bases qui permettent de simplifier l'écriture des formes quadratiques. On va donc chercher une base orthogonale, ds laquelle $M(q)_{e_i}$ sera diagonale (2).

I. Réduction en carrés d'une forme quadratique: mθ de Gauss (p.225) (3)

Compte tenu de la correspondance bij. entre f.b.s. et f.quadratique, on peut commencer par s'intéresser à:

Soit $f : E\times E\to\mathbb{R}$ f. bilinéaire. E dim. finie $\Rightarrow$ $\{e_i\}$ base.

Notant $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$ et $y=\sum_{i=1}^n y_ie_i$, on a :

$$f(x,y)=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_iy_j = a_{11}x_1y_1+a_{12}x_1y_2+..+a_{ij}x_iy_j+..+a_{nn}x_ny_n$$

Donc $q(x)=f(x,x)=\underbrace{a_{11}x_1^2+...+a_{nn}x_n^2}_{\text{termes carrés}}+\underbrace{...+a_{ij}x_ix_j+...}_{\text{termes rectangles}}$

Polynôme homogène de degré 2 en les x_i.

<u>Remarque</u>: Si f est un produit scalaire, tous les coefs a_{ii} des termes carrés sont > 0. (par l'absurde, sinon f pas def.pos.).

<u>Exemple</u>: $f(x,x)=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_2x_3$

1°) On ordonne suivant la variable x_1:

$f(x,x)=\underbrace{x_1^2+2x_1x_2}_{\text{termes avec } x_1}+2x_2^2+5x_3^2-4x_2x_3$

2°) On écrit les termes avec x_1 comme le début d'un carré: $f(x,x)=\underbrace{(x_1+x_2)^2}_{\text{termes avec } x_1}\underbrace{-x_2^2}_{\text{terme correctif}}+2x_2^2+5x_3^2-4x_2x_3$

3°) On obtient le carré d'une forme linéaire + des termes sans x_1:

$f(x,x)=(x_1+x_2)^2\underbrace{+x_2^2+5x_3^2-4x_2x_3}_{\text{termes sans } x_1}$

4°) On recommence sur les termes sans x_1, en classant selon x_2: $f(x,x)=(x_1+x_2)^2\underbrace{+x_2^2-4x_2x_3}_{\text{termes avec } x_2}+5x_3^2$

$=(x_1+x_2)^2+(x_2-2x_3)^2\underbrace{-4x_3^2}_{\text{terme correctif}}+5x_3^2$

5°) Et ainsi de suite jusqu'à obtenir une somme de carrés de formes linéaires:

$q(x)=f(x,x)=(x_1+x_2)^2+(x_2-2x_3)^2+x_3^2$

Def 1: Cette expression est appelée **réduction en carrés de Gauss.** (4)

Th 1: q est **définie positive** ssi la réduction de Gauss donne **n carrés** affectés du signe "**plus**". (n=dimE).

<u>Application</u>: (p.301) Si q(x) s'écrit comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires $\varphi_1,...\varphi_n$, alors les $\varphi_1,...\varphi_n$ sont les composantes de x ds une base orthog.

<u>Exemple</u>: $q(x)=x_1^2+3x_2^2+7x_3^2+2x_1x_2+8x_1x_2$

Gauss --> $q(x)=(x_1+x_2)^2+2(x_2+2x_3)^2-x_3^2$

$=\varphi_1(x)^2+2\varphi_2(x)^2-\varphi_3(x)^2$. Posons:

$$\begin{cases} x'_1=\varphi_1(x)=x_1+x_2\\ x'_2=\varphi_2(x)=x_2+2x_3\\ x'_3=\varphi_3(x)=x_3\end{cases}\text{ d'où: }\begin{cases} x_1=x'_1-x'_2+2x'_3\\ x_2=x'_2-2x'_3\\ x_3=x'_3\end{cases}$$

On a X=PX', où les vect. colonnes de P st ceux de la base orthogonale: $P=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$, et les vecteurs:

$v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ forment une **base orthogonale pour q.**

II. Classification des f.quad sur un ev réel: Th de Sylvester (p.303)

Th 2: Th. de Sylvester. Soient E $\mathbb{R}$-ev de dim n ($\approx\mathbb{R}^n$), et q f.quad. sur E. $\exists$ $\{e_i\}$ base de E tq si $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$,

$q(x)=x_1^2+...+x_p^2-x_{p+1}^2-...-x_r^2$, c'est-à-dire:

$$M(q)_{e_i}=\underbrace{\begin{pmatrix}\underbrace{\boxed{I_p}}_{\text{taille p}}&0&0\\0&\underbrace{\boxed{-I_{r-p}}}_{\text{taille r-p}}&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{\textit{taille r}}$$

où r = rang(q) et p est un entier qui ne dépend que de la f.quad q, et non de la base.

Def 2 : Signature de q. On note sign(q) = (p, r-p).

Cor: q **def. pos.** (i.e. (E,q) euclidien) ⇔ sign(q) = (n,0)
⇔ il existe des BON pour q
q **def. négative** ⇔ sign(q) = (0,n)
q **non dégénérée** ⇔ N(q) = {0} ⇔ sign(q) = (p, n-p)

<u>Exemple</u>: $q(x)=x_1^2+2x_2^2+15x_3^2-4x_1x_2+6x_1x_3-8x_2x_3$

Gauss --> $q(x)=(x_1-2x_2+3x_3)^2-2(x_2-x_3)^2+8x_3^2$
$=x'^2_1-x'^2_2+x'^2_3$

Donc sign(q)=(2,1).

III. Orthogonalité simultanée (p.307)

On va chercher une base orthogonale non seulement pour q, mais aussi pour le produit scalaire de E.

Th 3: Soient $(E,\langle .,. \rangle)$ un espace euclidien et q une forme quadratique sur E. Il existe alors des bases qui sont **orthogonales à la fois pour <.,.> et pour q.** (5)

Cor: Soient q forme quad. sur E $\mathbb{R}$ev de dim. finie, et S sa matrice ds une base qcq. Alors:
1°) On peut **construire une base orthog.** pour q formée de vect. ppes de S.
2°) De plus, $sign(q)=(n_+,n_-)$, où n_+ = nbre de val.ppes >0 de S, et n_- = nbre de val. ppes <0 de S.

<u>Exemple</u>: +315

$q(x)=-2x_1^2-2x_2^2-2x_3^2+6x_1x_2+6x_2x_3+6x_1x_3$

$S=\begin{pmatrix}-2&3&3\\3&-2&3\\3&3&-2\end{pmatrix}$, Spectre(S)={4;-5;-5}, sign(s)=(1,2).

Une application importante est la détermination de la forme réduite des quadriques dans une BON.

IV. Applications géométriques (p.389).

A. Coniques p.389

Def 3: Soient q f.quad. non nulle et φ forme lin. sur $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^2$ muni du pdt scal. canonique). On appelle **conique** l'ensemble C des v∈$\mathbb{R}^2$ vérifiant l'équation:
$q(v)+\varphi(v)=k$, où k∈$\mathbb{R}$.

On va classifier les coniques selon la signature de q. *Quitte à changer le signe des deux mbres de l'équat°(6), on peut supposer que* $\operatorname{sgn}(q)=\{(2,0);(1,1);(1,0)\}$.

Ds {e_1,e_2} base can., si $v=Xe_1+Ye_2$, l'éq° de C est du type: $\underbrace{\alpha X^2+2\beta XY+\gamma Y^2}_{q(v)}+\underbrace{\lambda X+\mu Y}_{\varphi(v)}=k$ (1)

où $\alpha,\beta,\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

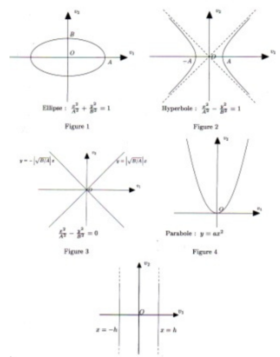
D'après le th.3, il existe **une base {v_1,v_2} orthogonale à la fois pour q et pour le pdt. scal.** Pour cela, on détermine comme ds l'exemple du III une base de vect. ppes de q qui soit orthogonale pour <,>.

La matrice de q ds la base canonique est $\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\beta&\gamma\end{pmatrix}$.

Les directions définies par ces v_1, v_2 sont dites **directions principales.**

Si $v=X'v_1+Y'v_2$ dans cette nouvelle base, l'équation de la conique s'y écrira:
$aX'^2+bY'^2-2rX'-2sY'=k$,
où: $a=q(v_1),b=q(v_2),-2r=\varphi(v_1),-2s=\varphi(v_2)$.
Après étude (Cf. leçon 146), on a:

Th 4: Si $C\neq\varnothing$ et C non réduite à un point, alors:
1) Si **sign(q)=(2,0)**, alors C est une **ellipse.**
2) Si **sign(q)=(1,1)**, alors C est une **hyperbole**, qui éventuellemt dégénère en deux droites non parallèles.
3) Si **sign(q)=(1,0)**, alors C est une **parabole**, qui peut dégénérer en un droite, ou en deux dtes parallèles, si la direction principale isotrope est contenue dans Kerφ.



B. Quadriques p.391 (bas)

Def 4: Soient q une f. quad non nulle et φ une f. lin. sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ (muni du pdt. cal. canonique).
On appelle **quadrique** l'ensemble Q des $v\in\mathbb{R}^3$ tq:
$q(v)+\varphi(v)=k$, où k∈$\mathbb{R}$.

Th 5: Si $Q\neq\varnothing$ et Q non réduite à un point, alors:
1) <u>Si rang(q) = 3</u>
(a) Si sign(q)=(3,0), Q est une **ellipsoïde.**
(b) Si sign(q)=(2,1), Q est:
- un **hyperboloïde à une nappe** (h>0)
- un cône (h=0)
- un **hyperboloïde à deux nappes** (h>0)

2) <u>Si rang(q) = 2</u>
(a) Si la dir° ppale isotrope n'est pas dans Kerφ, Q est :
- un **paraboloïde elliptique** si sign(q)=(2,0)
- un **paraboloïde hyperbolique** si sign(q)=(1,1)

(b) Si la dir° ppale isotrope est dans Kerφ, Q est un **cylindre** dont les sections par des plans orthogonaux à l'axe sont des coniques de signature (2,0) ou (1,1): **cylindre elliptique** ou **cylindre hyperbolique**, pouvant dégénérer en deux plans non parallèles.

3) <u>Si rang(q) = 1</u>
(a) Si l'une des deux dir° ppales isotropes n'est pas dans Kerφ, Q est un **cylindre parabolique .**
(b) Si les deux dir° ppales isotropes sont dans Kerφ, Q dégénère en **deux plans parallèles**, éventuellement confondus.

V. Autres applications (Sorosina p296).

--> *<u>Sans doute hors sujet.</u>*
La théorie sur les formes quadratiques permet aussi:
- de résoudre des problèmes matriciels, car on peut ramener l'étude de tte matrice symétrique réelle à celle de la f. quad. correspondante.
- d'étudier les extrema locaux d'une fonction $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *en un point critique a, en introduisant la f. quad* ϕ *dont la représentation matricielle est* $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\right)_{1\le i,j\le n}$, *cette matrice étant bien symétrique grâce au Th. de Schwarz sur les fonctions à plusieurs variables.*
On a alors:

$$\begin{cases} \phi \text{ définie positive} \Rightarrow f \text{ admet un min. local strict en a} \\ \phi \text{ définie négative} \Rightarrow f \text{ admet un max. local strict en a} \\ \phi \text{ ni négative, ni positive} \Rightarrow f \text{ n'admet pas d'extremum} \end{cases}$$

local en a.

VI. Notes.

(1) **Polynôme homogène**: polynôme dont tous les termes (monômes) sont de même degré.

(2) "**Réduction**": Il s'agit de rechercher des bases qui permettent de simplifier l'écriture des f. quad.
Ne pas confondre avec la diagonalisation des endomorphismes, où l'on cherche P inversible tq. $P^{-1}AP$ diag. Ici, on cherche P tq ${}^tPAP$ diagonale.

(3) Attention, sous cette forme, cette mθ n'est valable que pour E euclidien. Voir p.300 pour le cas g^{al}.

(4) La réduction en carrés de Gauss n'est pas unique, on aurait pu commencer par n'importe quelle variable au lieu de x_1.

(5) Démo adapté de celle de la Prop: Si f f.b.s. sur E ℝev de dim. finie, f définit un pdt scal. ssi sa matrice a ttes ses valaurs propres >0.

(6) "changer ts les signes" recouvre les cas sgn(q)=(0,2) et sgn(q)=(0,1).